1

以下の問に答えなさい。

(1) 次の微分方程式について，初期条件「$x = 0$のとき$y = 1$」を満たす解を求めなさい。

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = 1 + y$$

(2) 次の微分方程式について，初期条件「$x = 0$のとき$y = 1$」を満たす解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} + y + \sin x = 0$$

(3) 点Pの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$が，2つの変数r, θの関数

$$\boldsymbol{r}(r, \theta) = (r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta\ , r)$$

であるとする。rとθの変動にともなって，点Pのえがく曲面をSとしたとき，以下の問に答えなさい。

① 点Pにおける曲面Sの法線ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta)}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta)}{\partial \theta}$$

を求めなさい。

② 定義域を$D\colon 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$としたとき，曲面$S$の面積を求めなさい。

1

Answer the following questions.

(4) Solve the following differential equation subject to the initial condition that $y = 1$ when $x = 0$:

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} = 1 + y$$

(5) Solve the following differential equation subject to the initial condition that $y = 1$ when $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} + y + \sin x = 0$$

(6) Let the position vector $\boldsymbol{r}(r, \theta)$ of a point P be given as a function of two variables r and θ:

$$\boldsymbol{r}(r, \theta) = (r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta\,, r)$$

As r and θ vary, the point P traces out a surface S. Answer the following questions regarding the surface S:

③ Calculate the normal vector to the surface S at point P, which is given by

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(r, \theta)}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(r, \theta)}{\partial \theta}$$

④ Let the domain of the function be $D: 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi.$ Find the surface area of the surface S.

$\boxed{2}$

以下の問に答えなさい。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする。$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 A を求めなさい。なお，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトルを意味する。

(2) 問 (1) で求めた行列 A について，$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P および対角行列 B を求めなさい。

(3) 問 (2) で求めた行列 P による変換 $\boldsymbol{x} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ を考える。問 (1) の $f(\boldsymbol{x})$ を z_1, z_2, z_3 の多項式として表しなさい。

(4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ とする。問 (3) の z_1, z_2, z_3 について，$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ を求めなさい。

$\boxed{2}$

Answer the following questions.

(1) Let $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ and $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Find the symetric matrix A so that $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$. Here, ${}^t\boldsymbol{x}$ is the transpose vector of $\boldsymbol{x}$.

(2) Find the orthogonal matrix P and the diagonal matrix B so that $B = P^{-1}AP$ for the matrix A in the equation (1).

(3) Suppose the transformation $\boldsymbol{x} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Express $f(\boldsymbol{x})$ in the question (1) as a polynomial in z_1, z_2, and z_3.

(4) Let $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Calculate $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ for z_1, z_2, and z_3 in the question (3).

1

図１に示すように，自己インダクタンス L_1, L_2 のインダクタからなる電磁誘導結合回路の端子 a, b 間に角周波数 ω，実効値 E の正弦波交流電圧源が，端子 c, d 間に抵抗値 R の負荷が接続されている。両インダクタ間の相互インダクタンスを M として，以下の問に答えなさい。ただし，電源の内部インピーダンスは無視できるものとし，回路は定常状態にあるとする。

(1) 図１の①および②のそれぞれの閉路についての回路方程式を，電流 $\dot{I}_1$ および $\dot{I}_2$ を用いて表しなさい。

(2) 問(1)の回路方程式を解いて電流 $\dot{I}_1$ および $\dot{I}_2$ を求めなさい。ただし，分母を実数化する必要はない。

(3) $|\dot{I}_1| = |\dot{I}_2|$，かつ $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ との位相差が $\pi/2$ であるとき，L_2 を L_1, R および ω で表しなさい。

(4) $\dot{I}_2$ が電圧源と同相になるとき，以下の問に答えなさい。

　① L_1, L_2 および M の間に成り立つ条件を求めなさい。

　② 電源側から見た回路のアドミタンス $\dot{Y}$ を求めなさい。

　③ この回路に供給される皮相電力，有効電力，および力率を求めなさい。

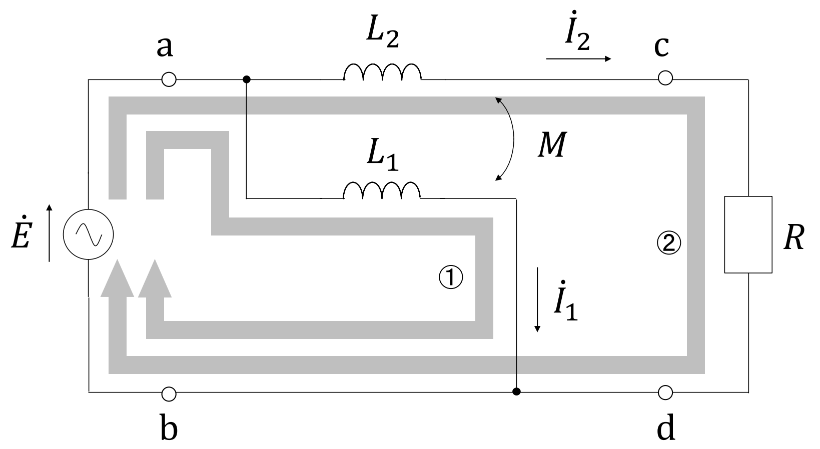

図１

1

The electromagnetic inductive coupling circuit is configured by inductors of L_1 and L_2 with the mutual inductance M, and a sinusoidal AC voltage source with an angular frequency of ω and an effective voltage of E is connected across the terminals a and b, and a load with resistance R is connected across the terminals c and d as shown in Fig. 1. Answer the following questions. Here, the internal impedance of the voltage source can be ignored and the circuit is in a steady state.

(1) Formulate circuit equations for the closed loops ① and ② in Fig. 1, respectively, using currents $\dot{I}_1$ and $\dot{I}_2$.

(2) Find currents $\dot{I}_1$ and $\dot{I}_2$ by solving circuit equations in question (1). Here, you do not need to make the denominator real.

(3) Express L_2 using L_1, R, and ω, under the conditions $|\dot{I}_1| = |\dot{I}_2|$ and the phase difference between $\dot{I}_1$ and $\dot{I}_2$ is $\pi/2$.

(4) Answer the following questions under the condition that $\dot{I}_2$ is in phase with the voltage source.

① Derive the relationship between L_1, L_2, and M.

② Find the admittance $\dot{Y}$ of the circuit as seen from the voltage source side.

③ Find the apparent power and the active power supplied to the circuit and the power factor.

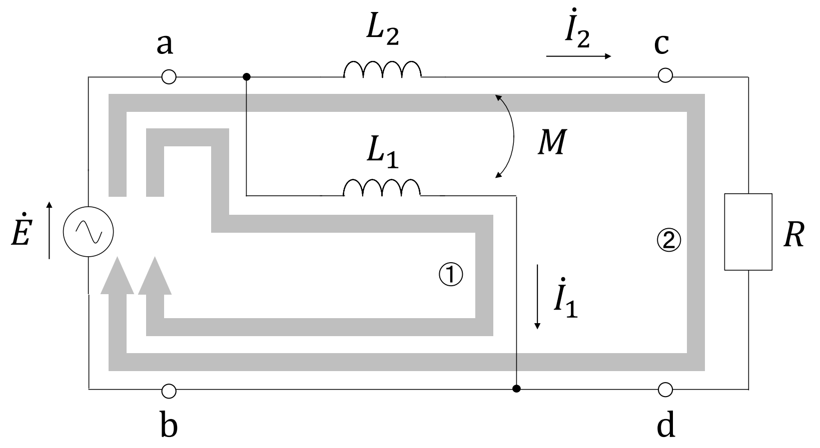

Fig. 1

2

図２に示す電圧 E の直流電圧源，抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，静電容量 C のコンデンサ，およびスイッチ S からなる回路がある。はじめ S は端子 a 側に接続され，回路は定常状態に到達しており，時刻 $t = 0$ で S を b 側に接続した。以下の問に答えなさい。ただし，S の切替に要する時間は 0 であるとし，$L = \dfrac{1}{4}CR^2$ を満たすとする。

(1) スイッチを b 側に接続した直後における R に流れる電流 $i(t)$，コンデンサの電位差 $v(t)$，および $i(t)$ の時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ の値を求めなさい。

(2) $t \geqq 0$ における $i(t)$ および $v(t)$ を求めなさい。ただし，解答は L を用いずに表しなさい。

(3) $t = 0$ から回路が定常状態に到達するまでに抵抗 R で消費されたエネルギーを求めなさい。

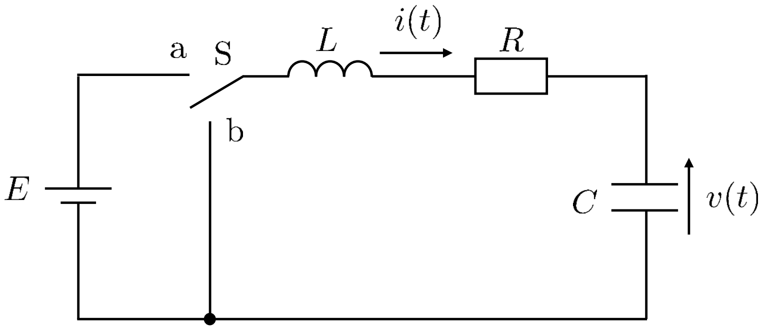

図２

2

As shown in Fig. 2, the circuit is configured by a DC voltage source of E, a resistor of R, an inductor of L, a capacitor of C and a switch S. Initialy, the switch S is connected to the terminal a, and the circuit has reached a steady state. At time $t = 0$, the switch S is thrown to the terminal b. Answer the following questions. Assume that the switching time for S can be ignored, and that the relationship $L = \frac{1}{4}CR^2$ holds.

(1) Immediately after the switch S is connected to the terminal b, find the current $i(t)$ through the resistor of R, the voltage $v(t)$ across the capacitor of C, and the time derivative of the current $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

(2) Find $i(t)$ and $v(t)$ for $t \geqq 0$. Express your answers without using L.

(3) Determine the amount of energy dissipated by the resistor of R from $t = 0$ until the circuit reached a steady state.

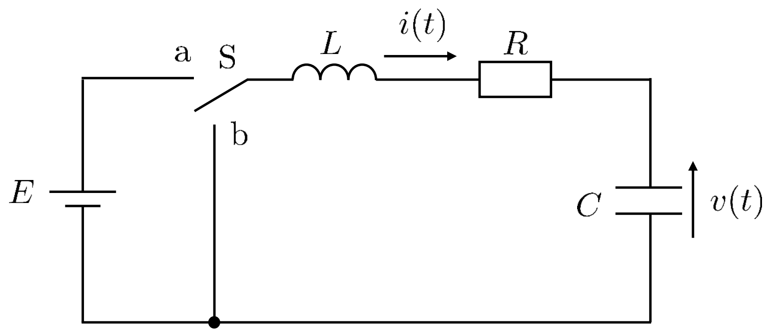

Fig. 2

1

図１に示すように，幅 a，奥行き b の２枚の極板が間隔 d で平行に配置されたコンデンサがある。極板間の電位差を V に保った状態で，幅 a，奥行き b，厚さ t （$t<d$）の導体板が, 極板に平行に幅 l の部分まで挿入されている。真空の誘電率を ε_0 とする。このとき，以下の問に答えなさい。ただし，極板と導体板の端部における電界の乱れは無視できるものとする。

(1) 導体板が挿入されている部分と挿入されていない部分の電界の大きさをそれぞれ求めなさい。
(2) 導体板が挿入されている部分と挿入されていない部分において，極板の単位面積当たりの電荷をそれぞれ求めなさい。
(3) このコンデンサの静電容量を求めなさい。
(4) このコンデンサに蓄えられた静電エネルギーを求めなさい。
(5) 導体板が引き込まれる力の大きさを求めなさい。

図２に示すように, 図１と同じコンデンサの極板に電荷 $\pm Q$ を与えた状態で, 幅 a, 奥行き b，厚さ t （$t<d$）の導体板を極板に平行に幅 l の部分まで挿入した。このとき，以下の問に答えなさい。

(6) このコンデンサに蓄えられた静電エネルギーを求めなさい。
(7) 導体板が引き込まれる力の大きさを求めなさい。

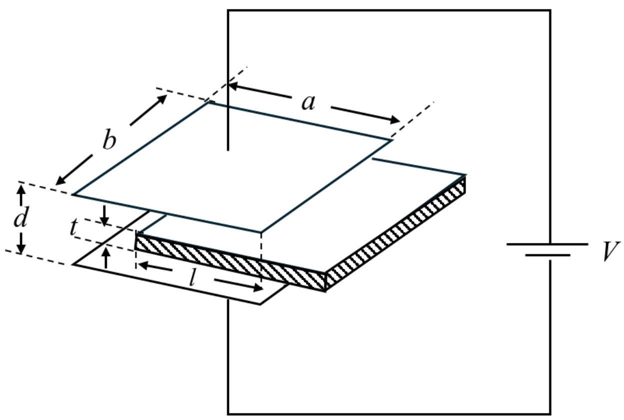

図１

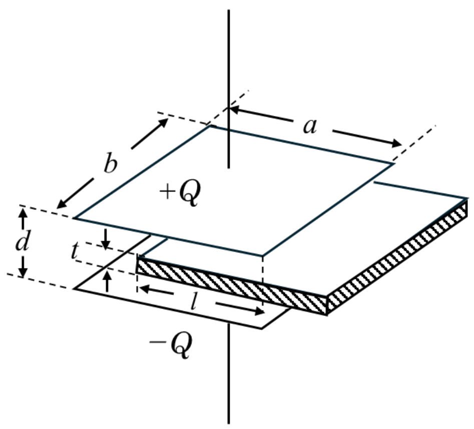

図２

2

図３に示すように真空中のz軸上に無限に長い導線があり，電流 I がz軸正の方向に流れている。また，各辺の長さが a の正方形コイルがxz平面内にある。真空の透磁率をμ_0とする。以下の問に答えなさい。

(1) コイルの左辺がz軸からℓだけ離れているとき，コイルの左辺上の任意の点における磁束密度の大きさと向きを求めなさい。
(2) 問(1)において，コイルで囲まれた面を貫く磁束を求めなさい。

次に，コイルの左辺および右辺をz軸と平行な状態を保ちながら，xz平面内でx軸正の方向に一定の速さvでコイルを遠ざける。以下の問に答えなさい。

(3) コイルの左辺がz軸からℓだけ離れているとき，コイルに誘起される誘導起電力を求めなさい。
(4) 問(3)においてコイルの電気抵抗値が R のとき，コイルを一定の速さvで動かし続けるのに必要な力の大きさと向きを答えなさい。

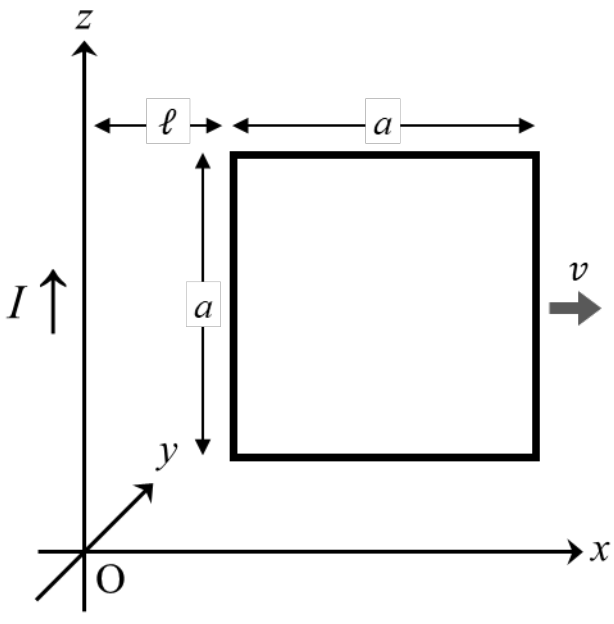

図３